

Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple : Soit la suite définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

En posant f la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto x - x^2$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

En fait, la plupart des suites étudiées jusqu'à présent sont de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f bien choisie.

Dans tout ce chapitre, f désignera une fonction définie sur un intervalle I .

1 Existence de tous les termes de la suite

1.1 Intervalles stables

DÉFINITION

On dit que J est un intervalle stable par f si $f(J) \subset J$.

Rappels : 1. $f(J) \subset J$ signifie que pour tout $x \in J$, $f(x) \in J$.

2. L'ensemble image $f(J)$ s'obtient par lecture du tableau de variations.

Exemple

L'intervalle $[0; 1]$ est stable par la fonction $f(x) = x - x^2$.

En effet, $f'(x) = 1 - 2x$ donc le tableau de variation de f est :

On en déduit que $f([0; 1]) = [0, \frac{1}{4}] \subset [0; 1]$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow 0	$\frac{1}{4}$	\searrow 0

1.2 Intérêt des intervalles stables

Pourquoi avons-nous introduit la notion d'intervalles stables ? Pour cela considérons l'exemple suivant :

Exemple : Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1}$

A priori, on peut penser que tous les termes de la suite u sont définis. Ce qui est faux.

En effet, $u_1 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1$; et puisque $u_1 = 1$, $u_1 - 1 = 0$.

Donc il est impossible de calculer u_2 : u_2 n'existe pas et les termes suivants non plus.

De ce fait, seuls les deux premiers termes de la suite u existent !

Méthode : Supposons que l'intervalle I soit un intervalle stable de f et que $u_0 \in I$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n$ existe et $u_n \in I$

Pour le démontrer, posons l'hypothèse de récurrence suivante : \mathcal{P}_n : " u_n existe et $u_n \in I$ "

- \mathcal{P}_0 est vraie car d'après l'énoncé, $u_0 \in I$.

- Supposons que \mathcal{P}_n est vrai. Alors u_n existe et $u_n \in I$. Or f est définie sur I donc $f(u_n)$ existe et par stabilité de I par f , $f(u_n) \in f(I) \subset I$. Donc $f(u_n) \in I$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_n est vraie.

Conclusion : si I est un intervalle stable de f et que $u_0 \in I$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n$ existe et $u_n \in I$.

Retour exemple introductif : Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Si on suppose de plus que $u_0 \in [0, 1]$, alors on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0, 1]$, puisque l'intervalle $[0, 1]$ est stable pour la fonction associée et contient u_0 .

2 Limites éventuelles

2.1 Points fixes

DÉFINITION

Soit $x \in I$. On dit que x est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Remarque : Soit f une fonction continue sur I et $[a, b] \subset I$ un intervalle stable par f .

Alors f possède un point fixe appartenant à $[a; b]$.

En effet, posons $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a; b]$ et $g(a) = f(a) - a \leq 0$ et $g(b) = f(b) - b \geq 0$, car $f(a)$ et $f(b) \in [a; b]$ puisque $[a, b]$ est stable par f . Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a; b]$ tel que $g(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$.

2.2 Limites

Rappel chapitre continuité :

Théorème

Soit f une fonction **continue** en un point l (ou sur un intervalle contenant l) et u une suite convergeant vers l . Alors la suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(l)$.

Supposons maintenant que la suite u converge vers une limite finie $l : u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

Le théorème précédent montre que $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l)$. Mais d'autre part, $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ et donc par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que $l = f(l)$.

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite converge vers l et si la fonction f est continue en l , alors l est un point fixe de f .

Autrement dit l est solution de l'équation $f(x) = x$.

En général, la fonction f possède non pas un mais plusieurs points fixes. Pour déterminer la limite éventuelle, on utilise le résultat classique sur les suites : si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in (a; b)$ et si la suite u converge vers l alors $l \in [a; b]$.

Exemple

Soit la suite u définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Etape 1 : la suite est-elle bien définie ?

2 méthodes : la première est de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} u_n$ existe et $u_n > 0$.

La deuxième consiste à étudier la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et à trouver un intervalle stable contenant $u_0 = 1$: l'intervalle $[1, +\infty[$ convient. On obtient que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in [1, +\infty[$.

Etape 2 : recherche de points fixes (limites éventuelles)

L'équation $x = x + \frac{1}{x}$ n'admet pas de solution dans $[1, +\infty[$ (ni même dans \mathbb{R}^* !), donc u n'admet pas de limite.

Etape 3 : monotonie de la suite

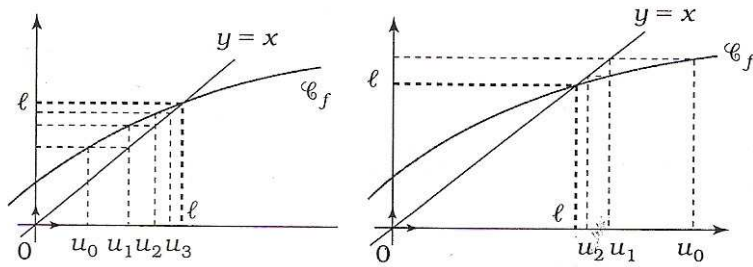
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ donc u est strictement croissante; on en déduit que u diverge vers $+\infty$.

3 Représentation graphique

En utilisant la courbe \mathcal{C} associée à f , on peut représenter la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ sur l'axe des abscisses du repère orthonormé dans lequel on a tracé \mathcal{C} .

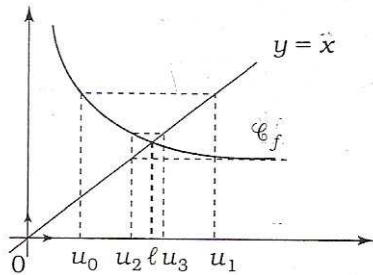
La droite d'équation $y = x$ permet de reporter les points de l'axe des ordonnées à l'axe des abscisses et met en évidence l'éventuelle limite de la suite qui est l'abscisse d'un point d'intersection de cette droite avec \mathcal{C} . (En effet un point fixe de f est l'abscisse d'une intersection de la courbe et de la droite $y = f(x)$!).
Représentation graphique sur des exemples (Précis de Mathématiques édition Bréal).

1)



Sur les deux figures, \mathcal{C}_f est la représentation graphique d'une même fonction f monotone croissante. Dans les deux cas, (u_n) est monotone (et elle converge vers l), mais selon le choix de u_0 ($u_0 < l$ ou $u_0 > l$), (u_n) est croissante ou décroissante.

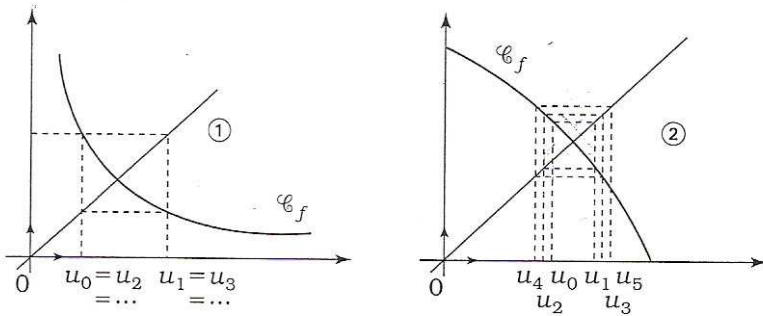
2)



D'après ce graphique, on peut penser que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, donc qu'elles convergent vers la même limite l et donc que (u_n) converge vers l .

Plus généralement, lorsque f est monotone décroissante, $f \circ f$ est monotone croissante. Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , qui sont définies par la relation de récurrence $u_{k+1} = f \circ f(u_k)$, sont donc monotones. Dans ce cas, pour que la suite (u_n) soit convergente, il faut que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient convergentes et qu'elles aient la même limite.

Illustrons des situations dans lesquelles la suite (u_n) ne converge pas :



- dans le cas ①, (u_n) est périodique ;
- dans le cas ②, même si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, elles n'auront pas la même limite et u_n diverge.

4 Monotonie de la suite

Il ne reste plus qu'à justifier que la suite u converge. Nous allons essayer de déterminer la monotonie de la suite afin d'appliquer les théorèmes de convergence des suites monotones.

Attention : toutes ces méthodes seront à redémontrer à chaque fois. Il n'y a pas de théorème de cours.

Il y a plusieurs cas à distinguer : mais dans tous les cas, nous supposons que f est continue sur un intervalle I , qui est stable par f et qui contient u_0 . Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$.

4.1 critère $u_{n+1} - u_n$

Quand est-ce que ce critère permet de conclure ? Quand le signe de $f(x) - x$ est **constant** sur I .

Méthode

Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 .

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$.

Supposons en outre que $\forall x \in I$, $f(x) - x \geq 0$ (*) (resp. ≤ 0).

Alors la suite u est croissante (resp. décroissante).

En effet, en appliquant l'inégalité (*) au point $x = u_n \in I$: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ (resp. ≤ 0)

Vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.2 f est croissante

Méthode

Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 . Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$. Supposons en outre que f est croissante sur l'intervalle I .

Alors la suite u est monotone .

On calcule explicitement $u_1 (= f(u_0))$ et on distingue les deux cas suivants :

- $u_0 \leq u_1$

On va montrer par récurrence que la suite u est croissante. Posons, \mathcal{P}_n : " $u_n \leq u_{n+1}$ "

- \mathcal{P}_0 est trivialement vraie

- Supposons que \mathcal{P}_n est vrai donc $u_n \leq u_{n+1}$. Or la fonction f est croissante sur I et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à I donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$ ce qui montre que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_n est vraie et la suite u est croissante.

- $u_0 \geq u_1$

On va montrer par récurrence que la suite u est décroissante. Posons, \mathcal{P}_n : " $u_n \geq u_{n+1}$ "

- \mathcal{P}_0 est trivialement vraie

- Supposons que \mathcal{P}_n est vrai donc $u_n \geq u_{n+1}$. Or la fonction f est croissante sur I et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à I donc $f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_{n+2}$ ce qui montre que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_n est vraie et la suite u est décroissante

4.3 f est décroissante

Méthode

Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 . Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$. Supposons en outre que f est décroissante sur l'intervalle I .

Nous introduisons alors deux suites auxiliaires a et b définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.

Calculons a_{n+1} : $a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(a_n)$

Donc la suite a vérifie une relation de récurrence donnée par $a_{n+1} = (f \circ f)(a_n)$.

Par définition $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n (= u_{2n}) \in I$ et la fonction $f \circ f$ est croissante sur I !

On peut donc étudier la monotonie de la suite a à l'aide du paragraphe précédent.

De même, la suite b est définie par la relation $b_{n+1} = (f \circ f)(b_n)$ donc peut être étudiée comme a .

Remarque : Les deux suites a et b seront de monotonies contraires.

Idée de la preuve : si $a_0 \leq a_1 \Leftrightarrow u_0 \leq u_2$ alors par décroissance de f , $f(u_0) \geq f(u_1) \Leftrightarrow u_1 \geq u_3 \Leftrightarrow b_0 \geq b_1$.

De même si $a_0 \geq a_1$ alors $b_0 \leq b_1$.

5 Convergence

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \in (a, b)$ (intervalle de bornes a et b , mais peu importe qu'il soit ouvert ou fermé, avec a et b pouvant être l'infini) et que f est continue sur (a, b) .

5.1 u est monotone

Cas croissant

1. Si u est majorée (exemple, si $b \neq +\infty$) alors elle converge vers un point fixe de f appartenant à $[a; b]$
2. Si u ne semble pas majorée (par exemple $b = +\infty$). On essaie de minorer u par un nombre m tel qu'il n'existe pas de point fixe pour f sur l'intervalle $[m; b]$ et on utilise le raisonnement suivant :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$. Supposons que la suite u converge vers une limite finie l . Par suite $l \geq m$ et l est un point fixe de f . Or f ne possède pas de point fixe sur $[m; b]$: contradiction. Donc la suite ne converge pas et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$

A adapter dans le cas décroissant.

5.2 u n'est ni croissante ni décroissante

Il s'agit du cas étudié dans la section ' f décroissante '. Les suites a et b sont monotones donc on peut leur appliquer le raisonnement de la section précédente pour déterminer leurs convergences respectives. Puis on applique le théorème :

Théorème

La suite u converge vers l ssi (les suites $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ convergent et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = l$).

5.3 Méthode fondée sur l'inégalité des accroissements finis

Une autre méthode, dans le cas de convergence vers le point fixe l , consiste à utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Dans une première étape, on majore $|f'(x)|$ sur l'intervalle stable, par un réel $q < 1$.

Puis après vérification de **toutes** les hypothèses, on applique l'IAF aux points u_n et l , qui appartiennent à l'intervalle stable :

$$|f(u_n) - f(l)| \leq q|u_n - l| \Leftrightarrow |u_{n+1} - l| \leq q|u_n - l|.$$

On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq q^n |u_0 - l|$ (*).

On conclut avec le théorème d'encadrement que $|u_n - l| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Leftrightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ car $0 \leq q < 1$.

L'inégalité (*) permet de connaître en plus la vitesse de convergence! (car u_n s'approche aussi vite de l que q^n de 0, c'est-à-dire très vite!)

Exemple fondamental : Etude de la suite u définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Une représentation graphique montrerait immédiatement que (u_n) converge en croissant vers 2.

Sinon, par le calcul : notons f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \sqrt{x + 2}$; f est continue sur \mathbb{R}^+ .

Méthode 1 : sans utiliser ce chapitre

- On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 2$.
Donc la suite est définie pour tout n et majorée par 2.
- On démontre par récurrence que la suite u est croissante : $u_1 = \sqrt{2}$ donc $u_0 \leq u_1$.
Puis $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}$ par croissance de $\sqrt{} \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
Donc la suite est croissante.
- La suite u est croissante et majorée, donc elle converge ; soit l sa limite. Alors $0 \leq l \leq 2$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ donc par continuité de f sur \mathbb{R}^+ , $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(l)$. Par ailleurs $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ donc par unicité de la limite de u_{n+1} , on obtient l'équation $f(l) = l$.
 $f(l) = l \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0$ et $l \geq 0 \Leftrightarrow l = 2$.

Méthode 2 :

- on peut vérifier que la fonction f vérifie les deux propriétés suivantes :
 - 1) $f([0, 2]) \subset [0, 2]$
 - 2) $\forall x \in [0, 2], f(x) \geq x$
 De la propriété 1) on peut déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 2]$ donc (u_n) est bornée ;
 et de la propriété 2) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$: donc (u_n) est croissante.
- Recherchons les points fixes de f : l est point fixe de $f \Leftrightarrow l$ est solution positive de l'équation $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow l = 2$.
- La suite u , croissante et majorée par 2, converge. La fonction f étant continue, elle converge vers un point fixe de f donc vers 2.

Méthode 3 : variante ou complément de la 2e méthode.

- On sait que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f et que 2 est un point fixe.
- On étudie alors f' sur $[0, 2]$ et on trace son tableau de variations : f' est décroissante et $\forall x \in [0, 2], |f'(x)| < 1/2$. On applique alors l'IAF aux points u_n et 2 : alors $|f(u_n) - f(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \Leftrightarrow |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
- Ensuite, on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - 2| = 2(\frac{1}{2})^n$.
- On conclut à l'aide du théorème d'encadrement : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$.

Méthode 4 : on peut montrer directement que $u_n - 2$ converge vers 0.

En effet, $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + 2}$ d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.

on en déduit par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - 2|$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - 2) = 0$.